31/3/17 Μάθημα 9ο

1) $\sigma = (1,4)$, $\tau = (1,4,3,5,6)$, $\rho = (2,3,6,4)$

$o(\sigma\tau\rho\tau\sigma) = o(\sigma\tau\rho\tau\sigma^{-1}) = o(\underbrace{\tau\rho\tau}_{\Pi}) = 6$

$o(\sigma\tau\rho^3) = 2$

$(1,4)(1,4,3,5,6)(2,4,6,3) = (2,3)(5,6)$

$\rho^{3}\tau^{20} = \rho^3 \cdot 1 = (2,4,6,3)$

2) $m \leq n$ $\langle (1,2,\dots,m) \rangle \leq \Sigma_n$

3) $\sigma = (2,3)$, $\rho = (1,4,6,3)$
$\tau = (2,3,4,5,6)$
$\sigma\tau\rho = (1,5,6,4,3)$
$\sigma\tau\rho^2 = (1,5,6,4,3)(1,4,6,3) = (1,3,5,6)$

$\rho^{-1}\tau^{22} = (1,3,6,4)\tau^2 = (1,3,6,4)(2,4,6,3,5) =$
$= (1,3,5,2) \Rightarrow o(\rho^{-1}\tau^{22}) = 4$

4) $H = \{1, \underbrace{(1,2)(3,4)}_{\alpha}, \underbrace{(1,3)(2,4)}_{b}, \underbrace{(1,4)(2,3)}_{\gamma}\} \leq \Sigma_4$

$o(\alpha) = o(b) = o(\gamma) = 2$
$\alpha b = \gamma = b\alpha$
$(1,2)(3,4)(1,3)(2,4) = (1,4)(2,3) = \gamma$
άρα η $H \leq \Sigma_4$ και μάλιστα ισομορφική με την ομάδα του Klein. $Z_2 \times Z_2$ είναι ομάδα του Klein

7) $\Sigma_3 = \langle (1,2)(3,1) \rangle = \langle f, g \rangle$ Κάθε $\sigma \in \Sigma_\nu$ γράφεται

$(1,2,3)(2,3)$

σαν γινόμενο αντιμεταθέσεων άρα αρκεί να γράψω όλες τις αντιμεταθέσεις Σ_ν $(\underset{\text{επιλογές } \nu}{\_\_}, \underset{\text{επιλογές } \nu-1}{\_\_})$

$(\underset{3}{\_\_}, \underset{2}{\_\_}) = 6$ αντιμεταθ.

Αν πάρω την $(2,3) = (1,2)(3,1)(1,2)$

$(1,2)(3,1) = (1,3,2)$

$(1,3,2)(1,2) = (2,3)$

$\Sigma_\nu = \langle (1,2), (1,3), (1,4) \rangle$

$(1,4,3,2) = (1,2)(1,3)(1,4)$

Αλλάζοντας την σειρά δημιουργούμε όλους τους 4-κύκλους. Αρκεί να δημιουργήσουμε όλες τις αντιμεταθέσεις

$(2,3) = (1,2)(1,3)(1,2)$

$(2,4) = (1,2)(1,4)(1,2)$

Έτσι δημιουργούνται έτσι οι άλλες

8) $\alpha \sim_\nu \beta \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} = h \in Y$ Δεξιά σύμπλοκα

$\alpha = h\beta \Leftrightarrow Y\alpha = Y\beta$

$\alpha\beta^{-1} \in Y \Leftrightarrow (\alpha\beta^{-1})^{-1} \in Y \Leftrightarrow \beta\alpha^{-1} \in Y$

$\beta^{-1}\alpha \neq \alpha\beta^{-1}$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν είναι αβελιανή)

$\beta^{-1}\alpha \in Y \Leftrightarrow \beta^{-1}\alpha = h \in Y \Leftrightarrow$ αριστερά

$\alpha = \beta h, h \in Y \Leftrightarrow \alpha Y = \beta Y$ σύμπλοκα

4) $[G:Y]$ $G = \mathbb{Z}_{48}$ $Y = \langle 32 \rangle$

$$[G:Y] = \frac{|G|}{|Y|} = \frac{48}{o(32)}$$

$$o(32) = \frac{48}{(48,32)} = \frac{48}{16} = 3$$

Υπαρχουν 16 συμπλοκα

$a + Y = Y + a$ (αβελιανη)

$0 + Y = Y\{32, 16, 0\}$

$1 + Y = \{1+32, 1+16, 1\}$

$a + Y = \{a+32, a+16, a\}$ $0 \leq a < 16$

Αυτα ειναι ολα τα συμπλοκα

5) $(1, \overset{\Pi}{6}, 4, 9)(2, 7, \overset{A}{11})(3, 5, \overset{A}{8})(10, \overset{\Pi}{12}) = \overset{A}{a}$

$o(a) = \text{ΕΚΠ}(4, 3, 2) = 12$

$b \in \Sigma_{12}$ και $o(ba) = 5$

$b = \underbrace{(1, 2, 3, 4, 5)}_{o(b) = 5} \cdot a^{-1}$

$ba = (1, 2, 3, 4, 5)$

6) $\underbrace{a(1, 2, 3)a^{-1}}_{\text{αρτια}} = \underbrace{(1, 2)(3, 4, 5)}_{\text{περιττη + αρτια => περιττη}}$

A = Π

10) $O = \{1, f^2, f^3, g, fg, f^2g, f^3g\}$

$f^4 = 1 = g^2$, $g f^i g = f^{-i}$

$Y = \{1, f^2 g\}$ $\qquad f^2 g f^2 g = f^2 f^{-2} = f^2 f^2 = 1$

$[O:Y] = 4$ $\qquad$ 4 δεξιά 4 αριστερά

$1Y = Y$ $\qquad fY = \{f, fg\} \neq Yf = \{f, f^2 g f\} = \{1, f^2 g f = f^2 f^3 g = fg\}$

$f^2 Y = \{f^2, g\}$, $\quad Y f^2 = \{f^2, f^2 g f^2 = f^2 f^2 g = g\}$

$f^3 Y = \{f^3, f^3 f^2 g = fg\}$ $\qquad Y f^3 = \{f^3, f^2 g f^3 = f^2 f g = f^3 g\}$

11) - 12) με τον ίδιο τρόπο.

Θεώρημα Lagrange

Η τάξη κάθε υποομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας όταν αυτή είναι πεπερασμένη.

Αν $|O| < \infty \Rightarrow |Y| \mid |O|$

Πόρισμα: Η τάξη κάθε στοιχείου της O διαιρεί την τάξη της O.

απόδειξη:

1) Αν $|O| < \infty$ και $\alpha \in O \Rightarrow |\langle a \rangle| \mid |O|$ (Lagrange)

2) Αν $|O| = \infty$ και $\alpha \in O \rightarrow$ i) $o(\alpha) < \infty \Rightarrow |\langle a \rangle| \mid \infty$

ii) $o(\alpha) = \infty \Rightarrow$ "$\infty \mid \infty$"

Θεώρημα: Αν $|O| = p$ πρώτος τότε αυτή είναι κυκλική

απόδειξη:

Έστω O όχι κυκλική $\Rightarrow \exists\, a, b \in O$ ώστε $b \notin \langle a \rangle$ με $a, b \neq 1 \Rightarrow |\langle b \rangle| \mid p$ και $|\langle a \rangle| \mid p$. Άρα ο p έχει δύο διαφορετικούς διαιρέτες. Όχι το 1. Άτοπο.

Πρόταση: Κάθε ομάδα τάξης ≤ 5 είναι αβελιανή

απόδειξη:

1, 2, 3, 5 $\Rightarrow$ ο κυκλική. Άρα αβελιανή

Τάξη 4: $\mathbb{Z}_4$ ή $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ Klein

Υπάρχουν άλλες : όχι.
$|Q| = 4$ όχι αβελιανή
$Q = \{1, a, b, ab$
$o(a) = o(b) = 2 = o(ab) \Rightarrow ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$

Θεώρημα Fermat

Αν p πρώτος και a φυσικός με $(a,p) = 1$, τότε
$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

$(Z_p, +)$ ομάδα και $(Z_p^{\cdot}, \cdot)$
$|(Z_p^{\cdot})| = p-1$ άρα $\forall a \in Z_p^* \Rightarrow o(a) \mid p-1$

Αν $a > p \Rightarrow a \equiv a' \bmod p$, $0 < a' < p$ $\Rightarrow a^n \equiv (a')^n \bmod p$ και ισχύει
το προηγούμενο.

Θεώρημα Euler

Έστω a, m φυσικοί με $(a, m) = 1$ τότε
$a^{\phi(m)} \equiv 1 \bmod m$

απόδειξη:
$(Z_m, +)$
$a \in Z_m$ είναι αντιστρέψιμος αν $(a, m) = 1$
Στον Z_m' ορίζεται πολ/μος αλλά αυτό γίνεται ομάδα μόνο αν πάρουμε τα στοιχεία που είναι πρώτοι με το m. Αυτά είναι $\phi(m)$ σε πλήθος. Άρα $o(a) \mid \phi(m)$ όταν $(a, m) = 1$

π.χ. Z_m^* πρωταρχικά στοιχεία είναι αυτά που έχουν τάξη $\phi(m)$

Αρα αυτά τα στοιχεία είναι γεννητορες

$\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$4 \to 4^2 = 16 \equiv 2 \bmod 7$, $2 \cdot 4 = 8 \equiv 1 \bmod 7$

$O_7(4) = 3$

$2 \to 4 \to 8 \equiv 1 \bmod 7$ $\quad O_7(2) = 3$

$3 \to 9 \equiv 2 \bmod 7 \to 6 \to 18 \equiv 4 \bmod 7 \to$

$12 \equiv 5 \bmod 7 \to 15 \equiv 1 \bmod 7$

$O_7(3) = \phi(7) = 6$.

Συζυγία

<u>Ορισμός</u>: Το κεντρο μιας ομάδας G συμβολίζεται με
$Z(G) = \{\alpha \mid \alpha b = b\alpha \ \forall b \in G\}$

Προταση: 1) $Z(G) \leq G$

2) $Z(G) = G \Leftrightarrow G$ αβελιανή

Αν η ομαδα είναι αβελιανη τοτε όλα τα στοιχεια αντιμετατιθονται

<u>Αποδειξη</u>:

1) $1 \in Z(G) : b \cdot 1 = b = 1 \cdot b \ \forall b$

Αν $\alpha \in Z(G) \Rightarrow \alpha^{-1} \in Z(G)$: $ab = ba \ \forall b$

$(\alpha b)^{-1} = (ba)^{-1} \ \forall b \Leftrightarrow b^{-1}\alpha^{-1} = \alpha^{-1}b^{-1} \ \forall b$

Αρα επειδη ισχυει $\forall b \Leftrightarrow b\alpha^{-1} = \alpha^{-1}b$

Δηλ. $\alpha^{-1} \in Z(G)$

Αν $\alpha, \alpha' \in Z(G) \Rightarrow \alpha \cdot \alpha' \in Z(G)$

$(\alpha\alpha')b = \alpha(\alpha' b) = \alpha(b\alpha') = (\alpha b)\alpha' = (ba)\alpha' = b(\alpha\alpha')$

2) Αν G αβελιανη τοτε $\forall \alpha \in G \Leftrightarrow \alpha b = ba \Leftrightarrow Z(G) = G$.

π.χ. Να βρεθεί το κεντρο της Σ_3

$Z(\Sigma_3) = \{1\}$

$fg = gf$ Δεν ισχύει άρα $f, g \notin Z(\Sigma_3)$

$f^2 \notin Z(\Sigma_3)$ $\quad \underbrace{(fg)}_{f} g \neq g f g = f^2$

$fg \notin Z(\Sigma_3)$

$f^2 g$ $\quad \underbrace{(f^2 g)}_{f^2} g \neq g f^2 g = f$

π.χ. Να βρεθεί το κεντρο του $Z(GL(2,\mathbb{R}))$

Εστω ότι $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Z(GL(2,\mathbb{R}))$

Αυτο σημαίνει ότι αντιμετατιθεται με κάθε πίνακα

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \beta = \gamma \\ \delta = \alpha \end{matrix}$$

Άρα έχουμε $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ τυχαίο του $Z(GL(2,\mathbb{R}))$

Τώρα παίρνω:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ \beta & \beta+\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha+\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\alpha = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_{2\times 2}$$

$$Z(GL(2,\mathbb{R})) = \{\alpha I_{2\times 2} \mid \alpha \in \mathbb{R}^*\}$$

Προταση: Ισχυει οτι $Z(O_1 \times O_2 \times \dots \times O_k) = Z(O_1) \times \dots \times Z(O_k)$

$\alpha \in Z(O) \iff \alpha b = b\alpha \quad \forall b \in O$
$\alpha = b\alpha b^{-1}$

Ορισμός: Δυο στοιχεία α και b μιας ομαδας O καλουνται συζυγή, αν υπάρχει $\gamma \in O$ ωστε:
$b = \gamma a \gamma^{-1}$.

Προταση: Το $\alpha \in Z(O)$ ανν είναι συζυγες με τον εαυτο του.

→ Σε καθε ομαδα O ορίζεται μια σχεση ισοδυναμιας ως προς συζυγια:
$\alpha \approx b \iff \exists \gamma \in O$ με $b = \gamma a \gamma^{-1}$ ή
$\alpha = \gamma b \gamma^{-1}$

Θ.δ.ο είναι σχεση ισοδυναμιας.
1) είναι ανακλαστική αφου $\forall \alpha \in O \Rightarrow \exists \gamma = 1 \quad \alpha = 1a1^{-1}$
$\iff \alpha \approx \alpha$.
2) συμμετρικη: Αν $\alpha \approx b \Rightarrow b \approx a$
$\alpha \approx b \iff a = \gamma b \gamma^{-1} \iff \gamma^{-1} \alpha \gamma = b \iff b \approx a$
3) μεταβατικη: Αν $\alpha \approx b$ και $b \approx \gamma \Rightarrow \alpha \approx \gamma$
$\alpha \approx b \iff \exists \delta : \alpha = \delta b \delta^{-1}$
$b \approx \gamma \iff \exists \varepsilon : b = \varepsilon \gamma \varepsilon^{-1}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \delta(\varepsilon \gamma \varepsilon^{-1})\delta^{-1} = (\delta\varepsilon)\gamma(\delta\varepsilon)^{-1} \Rightarrow$
$\alpha \approx \gamma$.

Η προηγουμενη σχεση ισοδυναμιας μας δινει κλασεις ισοδυναμιας ως προς συζυγια: $[a] = \{\gamma a \gamma^{-1} \mid \gamma \in O\}$
κλαση του a.

$[a] = \{a\} \Leftrightarrow a \in Z(O)$

Η O γράφεται σαν ξένη ένωση των κλάσεων ισοδυναμίας

$\Sigma_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$

$[f] = \{f = f f f^{-1} = f^2 f f^{-2}, \; \underset{f^2}{gfg}, \; fgf(fg)^{-1}, \; f^2 g f (f^2 g)^{-1}\}$

$fgf(fg)^{-1} = \underbrace{fgfg}f^{-1} = f f^2 f^{-1}$

$f^2gf(f^2g)^{-1} = f^2\underbrace{gfg}f^{-2} = f^2 f^2 f^{-2} = f^2$

Άρα $[f] = \{f, f^2\}$

$[g] = \{g, fgf^{-1}, f^2gf^{-2}, (fg)g(fg)^{-1}, (f^2g)g(f^2g)^{-1}\}$

$fgf^2 = ffg = f^2g$

$f^2gf = f^2f^2g = fg$

$[g] = \{g, f^2g, fg\}$

Υπάρχει και η κλάση ισοδυναμίας ως προς κάποια υποομάδα Y.

$a \sim_Y b \Leftrightarrow ab^{-1} \in Y \Leftrightarrow ab^{-1} = h \Leftrightarrow Ya = Yb$

Τα δεξιά σύμπλοκα ως προς την Y.

Ή τα αριστερά

Με αυτήν την σχέση έχουμε

$O = Y \sqcup Ya_1 \sqcup \dots \sqcup Ya_{k-1}$

$k = [O:Y]$

$O = Y \sqcup a_1Y \sqcup \dots \sqcup a_{k-1}Y$

Ερώτηση: Πότε $\alpha Y = Ya \quad \forall \alpha \in G$

$$aY = Y\alpha \iff \alpha Y a^{-1} = Y \quad \forall \alpha \in G.$$

Ορισμός: Έστω $Y \leq G$. Αν ισχύει $\alpha Y \alpha^{-1} \subseteq Y \ \forall a \in G$ τότε η Y θα καλείται κανονική υποομάδα και θα γράφουμε $Y \trianglelefteq G$.